تحلیل محتوای

هندسه پایۀ هشتم بر اساس سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی

نرگس یافتیان، استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
اشرف صفابخش چکوسری، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی دورۀ متوسطۀ اول شهرستان صومعه‌سرا (استان گیلان)

چکیده

هدف از این پژوهش، تحلیل محتوای هندسه کتاب ریاضی پایۀ هشتم[1] بر اساس چارچوب ارائه شده در نظریۀ فن‌هیلی است. روش این پژوهش، تحلیل محتوای کیفی فصل هندسه کتاب ریاضی پایۀ هشتم (چاپ ۱۳۹۷) بود. نتایج پژوهش نشان داد که بیشتر مباحث این فصل، مبتنی بر سطح دوم یا سوم «نظریۀ سطوح تفکر هندسی» فن‌هیلی است. در صورتی که یافته‌های پژوهشی حاکی از آنند که تفکر استدلالی اکثر دانش‌آموزان پایۀ هشتم، در سطح اول یا دوم نظریه فن‌هیلی است.

کلیدواژه‌ها: کتاب ریاضی پایۀ هشتم، تحلیل محتوای کیفی، نظریۀ سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی

مقدمه

نظریۀ فن‌هیلی[2] معروف به «نظریۀ سطوح تفکر هندسی»، مربوط به چگونگی و مراحل درک مفاهیم هندسی دانش‌آموزان است. این نظریه، توانایی استدلال و تفکر هندسی را در پنج سطح، معرفی کرده است. در سطح مقدماتی (سطح نخست)، کلیت یک شکل هندسی مورد توجه قرار می‌گیرد و به تدریج، با کشف ویژگی‌های اشکال و بیان استدلال‌های غیررسمی دربارۀ این ویژگی‌ها (سطح‌های دوم و سوم) ادامه می‌یابد. سپس به سمت هندسه اصل موضوعی (سطوح چهارم) حرکت کرده و در سطح پنجم، دقت استدلالی افزایش پیدا می‌کند (فایز و همکاران، ۱۹۸۸). این سطوح به ترتیب، عبارت از «تجسم یا شناسایی»، «تجزیه و تحلیل»، «استنتاج غیررسمی»، «استنتاج رسمی» و «دقت موشکافانه» هستند. (به جای تمام آن منابع، می‌توان به یکی از مقاله‌های چاپ شده در مجله ارجاع داد.)

در این پژوهش، مباحث هندسی کتاب ریاضی پایه هشتم (چاپ ۱۳۹۷) با استفاده از نظریۀ مرحله‌ای تفکر هندسی فن‌هیلی، به روش تحلیل محتوای کیفی بررسی شد. در این تحقیق، «فعالیت‌ها»، «کاردرکلاس»ها و «تمرین»های مربوط به مبحث هندسه در کتاب درسی ریاضی پایۀ هشتم، از نظر سطح تفکر و استدلال هندسی مورد نیاز بر اساس نظریۀ فن‌هیلی، تعیین شد.

بیشتر پژوهش‌های انجام شده مربوط به ارزیابی سطوح فن‌هیلی، در دورۀ ابتدایی انجام شده است و نتایج، تأیید کننده این امر بوده‌اند که سطح کلی دانش‌آموزان این دوره، سطوح دوم یا حداکثر سوم فن‌هیلی بوده‌اند (کلمنتس[3]، ۲۰۰۳؛ گوتی‌یرز و جِیم، ۱۹۹۸؛ یوسسکین، ۱۹۸۲). در صورتی‌که ویژگی این پژوهش این است که در دورۀ متوسطۀ اول انجام شد و نتایج حاصل از تحلیل محتوا نشان داد که تقریباً، مباحث هندسی ارائه شده در کتاب پایۀ هشتم (چاپ ۱۳۹۷)، در سطوح اول تا سوم نظریه فن‌هیلی است و مفهومی در سطح‌های چهارم و پنجم، ارائه نشده است. بدین دلیل در کدگذاری محتوا، تنها به سه سطح اول پرداخته شد.

یافته‌ها

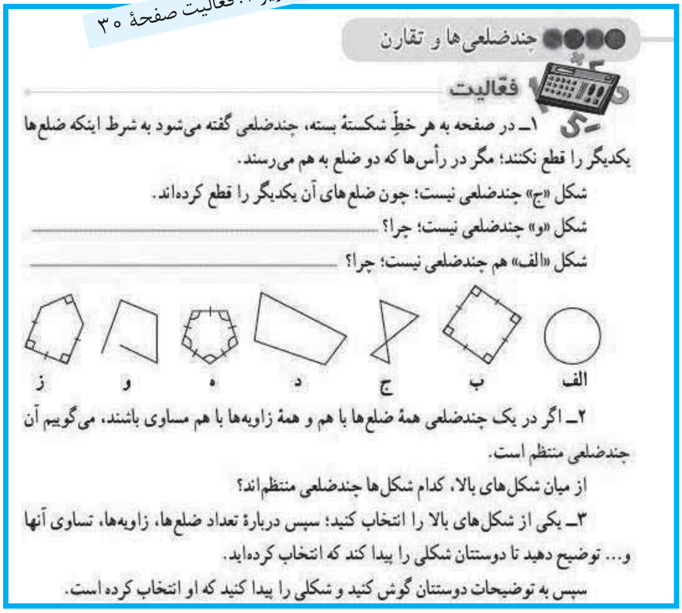
مبحث چندضلعی‌ها در کتاب ریاضی هشتم (چاپ سال ۱۳۹۷)، در فصل هندسه کتاب آمده و شامل درس‌های زیر است:

- چندضلعی‌ها و تقارن (صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

- توازی و تعامد (صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)
- چهارضلعی‌ها (صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)
- زاویه‌های داخلی (صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)
- زاویه‌های خارجی (صفحه‌های ۴۶ تا ۴۹)

ایــن فصل، با تعریف چندضلعــی در صفحهٔ ۳۰، شروع شده می‌شود (تصویر ۱)

تصویر ۱. فعالیت صفحهٔ ۳۰


چندضلعی‌ها و تقارن

فعّالیت

۱ــ در صفحه به هر خطِ شکستهٔ بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط اینکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند.

شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چندضلعی نیست؛ چرا؟ ....

شکل «الف» هم چندضلعی نیست؛ چرا؟ ....

۲ــ اگر در یک چندضلعی همهٔ ضلع‌ها با هم و همهٔ زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منتظم است.

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منتظم‌اند؟

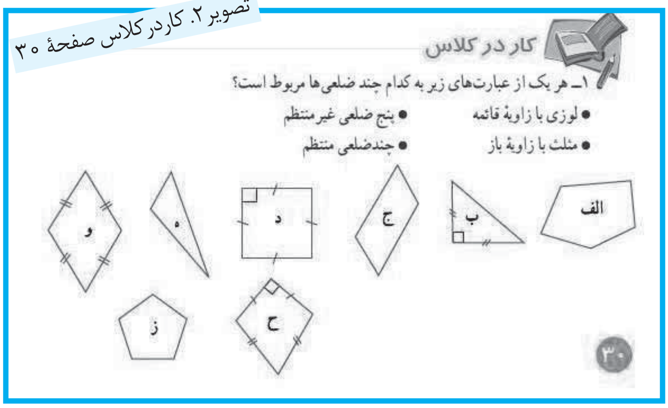
۳ــ یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید؛ سپس دربارهٔ تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها و... توضیح دهید تا دوستتان شکلی را پیدا کند که انتخاب کرده‌اید.

سپس به توضیحات دوستتان گوش کنید و شکلی را پیدا کنید که او انتخاب کرده است.

این تعریف (فعالیت شــمارهٔ ۱) که برای درک آن از شــکل کمک گرفته می‌شــود، تا اندازه‌ای شهودی است. با این حال از آنجا که در این تعریف، برای معرفی چندضلعی‌ها از اجزای شکل استفاده شده است، برای درک آن، برخورداری از توانایی استدلال در سطح دوم فن‌هیلی ضروری اســت. انجــام فعالیت‌های ۲ و ۳ در همین صفحه نیز، نیازمند توجه به اجزای شــکل‌های هندســی و ویژگی‌های آن‌هاســت. بدین جهت این فعالیت‌ها نیز در سطح دوم فن‌هیلی ارزیابی می‌گردند.

در این فصل پس از تعریف چندضلعی و انجام چند فعالیت مرتبط با آن (تصویــر ۱)، در همین صفحه از کتاب (صفحهٔ ۳۰) کاردرکلاس مقابل آورده شده است (تصویر ۲):

تصویر ۲. کاردر کلاس صفحهٔ ۳۰


کار در کلاس

۱ــ هر یک از عبارت‌های زیر به کدام چند ضلعی‌ها مربوط است؟

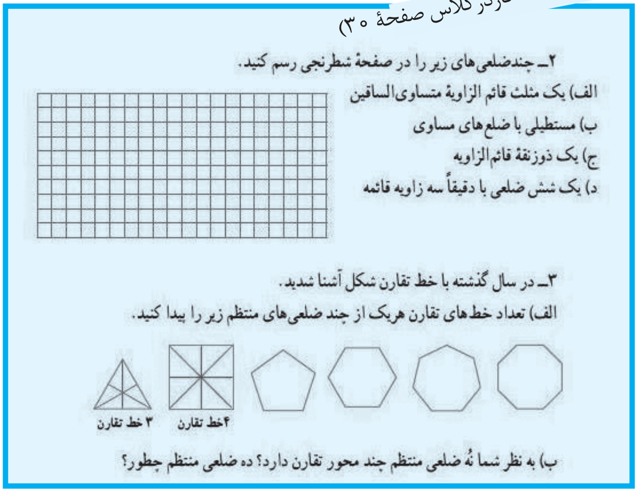
- لوزی با زاویهٔ قائمه
- پنج ضلعی غیرمنتظم
- مثلث با زاویهٔ باز
- چندضلعی منتظم

در مورد ایــن کاردرکلاس، بیــان دو نکته دارای اهمیت است:

۱. مشخص نیســت در این تمرین از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که به‌طور شهودی در مورد نوع چندضلعی و ویژگی‌های آن قضاوت کنند یا به نشــانه‌گذاری‌های روی ضلع‌ها و زاویه‌ها توجه کنند. برای مثال، در حالی که شکل (ز) یک چندضلعی منتظم به چشم می‌آید، ولی اگر مبنای قضاوت را نشــانه‌گذاری روی اضلاع و زاویه‌ها قرار دهیم، در حقیقت مسئله هیچ اطلاعاتی در مورد برابری اندازهٔ ضلع‌ها یا زاویه‌های آن نداده اســت. البته با توجه به اینکه در مورد شکل‌های (ب)، (د)، (و) و (ح)، ضلع‌های هم‌نهشت و زاویه‌های قائمه مشخص شده‌اند، می‌توان چنین استنباط کرد که انتظار می‌رود قضاوت دانش‌آموز نیز بر اساس این داده‌ها صورت پذیرد. در آن صورت، اجازه نداریم بگوییم که شــکل (ز) یک چندضلعی منتظم هست یا نیست. همین موضوع برای شکل (ج) هم وجود دارد که اگرچه یک متوازی‌الاضلاع به نظر می‌رسد ولی توضیحی دربارهٔ ویژگی اجزای آن داده نشــده اســت. به بیان دیگر می‌توان گفت سطح پاسخگویی به این کاردرکلاس، می‌تواند یکی از سطوح اول یا دوم نظریهٔ فن‌هیلی باشد.

۲. تمرکز این فصل از کتاب بر معرفی چهارضلعی‌ها (به‌طور ویژه متوازی‌الاضلاع‌ها) است. در صفحه‌های بعد، ویژگی‌های چهارضلعی‌ها مورد بررســی قرار می‌گیرد. افزون بر این، روابط بین این ویژگی‌ها در یک چهارضلعی و نیز روابط بین چهارضلعی‌های مختلف، بررسی می‌شود. در این راستا، کتاب تلاش کرده به‌طور تجربی و گام‌به‌گام، دانش‌آموز را به سمت ارائه یا دست‌کم درک تعریف‌های ارائه شــده برای انواع متوازی‌الاضلاع‌ها راهنمایی کند و پذیرش تداخل رده‌هــای چهارضلعی‌ها را به تدریج، آسان‌تر سازد. ولی تحلیل محتوای صفحه‌های این فصل از کتاب نشان داد که این هدف، تا پیش از پایان صفحهٔ ۳۹ به دست نمی‌آید (تصویر ۹). بنابراین تمرین شمارهٔ ۱ از کاردرکلاس صفحهٔ ۳۰ که از دانش‌آموز می‌خواهد از بین شکل‌های داده شــده، شکلی را که یک «لوزی با زاویهٔ قائمه» اســت، پیدا کند، شــتاب‌زده است، زیرا بسیاری از دانش‌آموزان در شروع این فصل، لوزی بودن

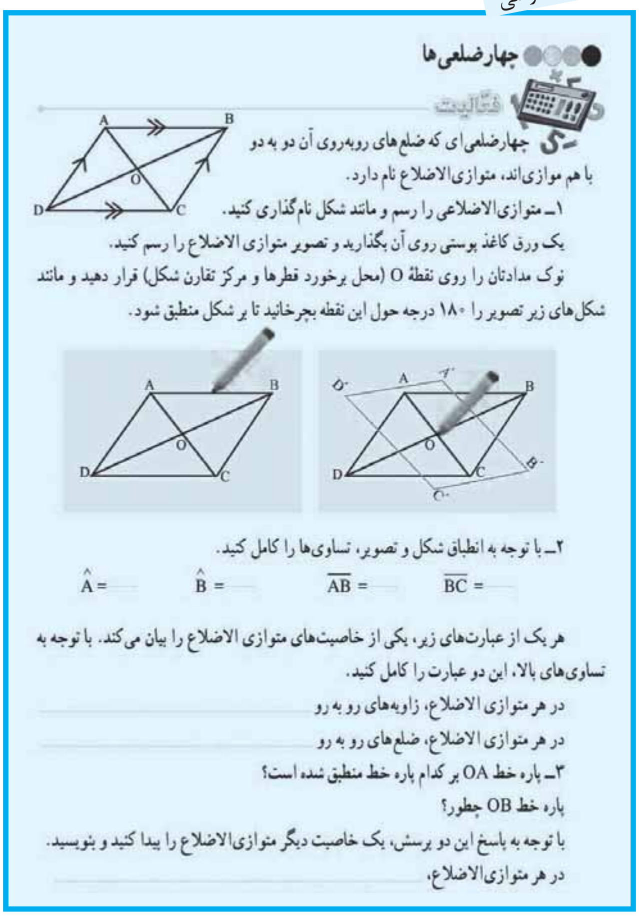
تصویر ۳. صفحهٔ ۳۱ (ادامهٔ کاردرکلاس صفحهٔ ۳۰)



مربــع را درک نمی‌کنند و حتی بعضی از آن‌ها، قائمه بودن زاویه‌ها را با لوزی بودن، مغایر می‌دانند. چنانچه تجربه‌های معلمان این پایه مؤید است که اگر از شکلی که یک «لوزی با زاویهٔ قائمه» اســت نام ببرند، بیشتر دانش‌آموزان چهارضلعی (ج) را پیشنهاد می‌دهند.

نظیر چنیــن خواســته‌ای نیــز در ادامهٔ همین کاردرکلاس، در صفحهٔ ۳۱ کتاب دوباره عنوان گردیده است (تصویر ۳، کاردرکلاس شمارهٔ ۲، قسمت (ب)).

تصویر ۴. صفحهٔ ۳۸ کتاب درسی



برای انجام ایــن کاردرکلاس، معلم چند انتخاب پیش رو دارد:

۱. با پاسخ برخی دانش‌آموزان مبنی بر آنکه چنین مســـتطیلی وجود ندارد، به‌طور موقت موافقت کند و اجـــازه دهد تا دانش‌آموزان پـــس از انجام فعالیت‌های کتاب، گام‌به‌گام به سوی تعریف دقیق مستطیل پیش بروند.

۲. برای آنکه موجه بودن «مستطیلی با ضلع‌های مساوی» را ممکن سازد، پیش از پرداختن به فعالیت‌های پیش‌بینی شدهٔ کتاب و با نقض سلسله مراتبِ در نظر گرفته شده برای محتوای آموزشی، تعریفی زود هنگام از مستطیل ارائه دهد.

۳. مربعی را به‌عنوان پاســخ این قسمت رسم کند و توجیه ارتباط آن را با مســـتطیل، برای دانش‌آموزان بهت‌زده، به جلسه‌ها و صفحه‌های آینده موکول کند.

۴. مستطیل بودن مربع را حقیقتی که دانش‌آموزان می‌بایســت از آن آگاه باشــند تصور نمــوده و به حل کاردرکلاس ادامه دهد.

اگر ســه حالت اخیــر رخ دهد، با توجــه به روند سلســـله‌مراتبی محتوای کتاب، پرســش آن است که ضرورت فعالیت‌های تجربی صفحه‌های آینده که قرار اســت به کشــف ویژگی‌های چهارضلعی‌ها بیانجامد چیست، و چرا بیان تعریف‌های مستطیل، لوزی و مربع تا صفحهٔ ۳۹ (تصویر ۷)، به تأخیر افتاده است؟

تصویــر ۴، تصویری از صفحهٔ ۳۸ کتاب درســی ریاضی هشتم را نشان می‌دهد.

در این صفحه و با یــک فعالیت، ابتدا تعریفی از متوازی‌الاضلاع داده می‌شود. این یک تعریف ریاضی از متوازی‌الاضلاع است و نسبت به درک شهودی که پیش از این، دانش‌آموزان در تشخیص متوازی‌الاضلاع از آن اســـتفاده کرده بودند، در ســـطح بالاتری قرار دارد. یک تعریف ریاضی، به شــرطی برای دانش‌آموز معنادار اســت که او به توانایــی درک چنین تعریفی دست یافته باشــد. در حالی که پژوهش‌های متعدد انجام شـــده دربارهٔ مشخصه‌های ســطوح فن‌هیلی، همگی نشــان می‌دهند که درک تعریف‌های ریاضی، نیازمند برخورداری از تفکر هندســی در سطح سوم فن‌هیلی اســت (کلمنتس، ۲۰۰۳؛ برگر و شاونسی، ۱۹۸۶؛ میسون، ۱۹۹۵؛ کراولی، ۱۹۸۷). در حالی که در ابتدای این فعالیت، پیش فرضِ کتاب این اســت که دانش‌آموزان از عهــدهٔ درک تعریف‌های ریاضی،

برمی‌آینـــد. به بیانی دیگـــر، از دانش‌آموز انتظار رفته اســـت که یک دستیابی نسبی به سطح سوم را کسب کرده یا دستِ‌کم، سطح دوم تفکر را گذرانده و آمادهٔ ورود به سطح سوم تفکر باشد.

در ادامه، این صفحه به تشریح یک فعالیت تجربی می‌پردازد (فعالیت شمارهٔ ۱، تصویر ۴). در ضمن، این فعالیت که باید توســـط دانش‌آموز انجام شود، او را به ســـمتی هدایت می‌کند که با انجام دست‌ورزی‌هایی کـــه کتاب از او خواســـته، برخـــی از ویژگی‌های یک متوازی‌الاضلاع را کشف کند. این ویژگی‌ها عبارتند از هم‌نهشتی زاویه‌های روبه‌رو، هم‌نهشتی اضلاع روبه‌رو و منصّف بودن قطرهای یک متوازی‌الاضلاع اســـت. این همان چیزی اســـت که از یک دانش‌آموز با تفکری در ســـطح دوم فن‌هیلی مورد انتظار اســـت؛ یعنی او باید بتواند به کمک مشاهده و تجربه، ویژگی‌های اشکال را دریابد (کراولی، ۱۹۸۷).

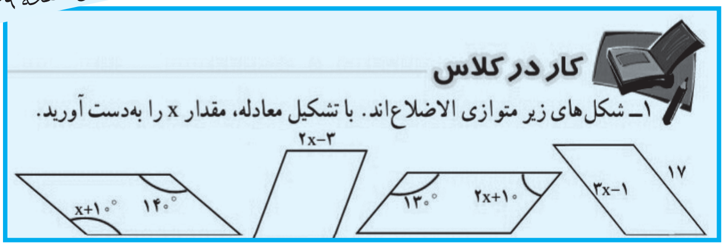
در واقع تحلیل محتوای این بخش نشـــان داد که انجام و درک عمیـــق فعالیت‌های این صفحه، نیازمند برخورداری از پیش‌نیازی، دســـتِ‌کم در حد دستیابی به سطح دوم فن‌هیلی اســـت و در ضمنِ انجام چنین فعالیتی، قرار اســـت این تســـلط به درجهٔ بالاتری هم برسد.

در تصویرهای شـــمارهٔ ۵ و ۶ به‌طـــور جداگانه، دو تمرین مربوط به کاردرکلاس صفحهٔ ۳۹ از کتاب درسی نشان داده شـــده است که به درک عمیق‌تر این یافته، کمک می‌کند.

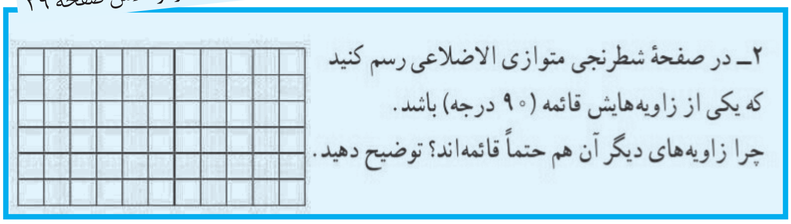
تصویر ۵، مربوط به یک تمرین ترکیبی اســـت که بلافاصله پس از فعالیت صفحهٔ ۳۸ که در تصویر ۴ دیده شد، آمده اســـت. برای پاسخگویی به این تمرین، لازم اســـت دانش‌آموز به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع که در صفحهٔ ۳۸ کتاب و در ضمن انجام فعالیتی تجربی دست یافته (ســـطح دوم فن‌هیلی)، مسلط باشد و بتواند این ویژگی‌ها را به‌صورت تساوی‌هایی که منجر به تشکیل و حل معادله‌های درجهٔ اول یک مجهولی می‌گردد، بیان نماید.

در تصویر ۶، تمرین دومِ کاردرکلاس صفحهٔ ۳۹ از کتاب درسی دیده می‌شود. در این تمرین، پاسخگویی به پرســـشِ «چرا زاویه‌های دیگـــر آن حتماً قائمه‌اند؟ توضیح دهید»، نیازمنـــد درک روابط بین ویژگی‌های متوازی‌الاضـــلاع و نیـــز برخـــورداری از توانایی انجام استدلال‌های استنتاجی غیررسمی است و با استناد به

تصویر ۵. تمرین شمارهٔ ۱، کاردرکلاس صفحهٔ ۳۹



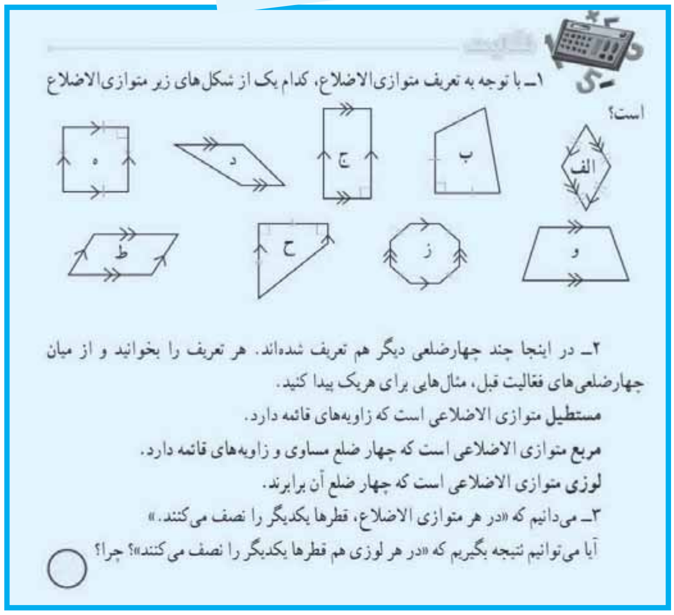
تصویر ۶. تمرین شمارهٔ ۲، کاردرکلاس صفحهٔ ۳۹



مشخصه‌های ارائه شده برای سطوح فن‌هیلی، در سطح دوم شمرده نمی‌شود و پس از دستیابی به سطح سوم فن‌هیلی به دست می‌آید (کلمنتس، ۲۰۰۳؛ مالوی[4]، ۲۰۰۲؛ میســـون، ۱۹۹۵؛ کراولی، ۱۹۸۷؛ یوسسکین، ۱۹۸۲). افزون بر این، توجه به این نکته ضروری است که در سطر اول این تمرین، از دانش‌آموز خواسته شده است که «متوازی‌الاضلاعی» با ویژگی داده شده رسم کند. با فرض آنکه دانش‌آموز موفق به رســـم این شکل شـــود، چنین متوازی‌الاضلاعی، الزاماً یک مســـتطیل خواهد بود. تجربه‌های معلمان هم حاکی از این است که بسیاری از دانش‌آموزان، در نهایت شکلی شبیه به یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه رســـم می‌کنند و قادر به پیاده‌سازیِ ویژگی‌های بیان شـــده در تعریف متوازی‌الاضلاع، در ضمن رسم چهارضلعی خواســـته شده در این تمرین نیستند. برخی، حتی در صورت درک ویژگی‌های گفته شده در تعریف، در عمل تلاش می‌کنند از تبدیل شدن شکل به یک مســـتطیل جلوگیری کنند، چون هنوز قادر به پذیرش مستطیل به‌عنوان یک متوازی‌الاضلاع نیستند

اینکـــه دانش‌آمـــوز درک کنـــد مســـتطیلی (یا تصادفاً مربعی) که در نهایت رســـم خواهد شد، همان «متوازی‌الاضلاعی است» که مســـئله خواسته است، نیازمند درک این مطلب اســـت که یک مستطیل (یا مربع) هـــم یک متوازی‌الاضلاع اســـت. این به معنای توانایی درک و پذیرش تداخل رده‌های هم‌ارزی و درک روابط بین اشکال است و این توانایی، پیش از دستیابی به سطح ســـوم تفکر فن‌هیلی به دســـت نخواهد آمد

تصویر ۷. فعالیت صفحهٔ ۳۹



(میسون، ۲۰۰۹؛ کلمنتس، ۲۰۰۳؛ میسون، ۱۹۹۵؛ کراولی، ۱۹۸۷؛ فن‌هیلی، ۱۹۵۹).

تصویر ۷، بخشــی دیگر از همان صفحهٔ ۳۹ را که شامل سه فعالیت است، نشان می‌دهد.

انجــام فعالیت شــمارهٔ۱ از صفحــهٔ ۳۹ (تصویر ۷)، نیازمنــد درک تعریــف متوازی‌الاضلاع (ســطح ســوم فن‌هیلی) اســت. گوتییرز و جِیــم (۱۹۹۸)، خصیصه‌هایی برای ســطوح مختلف فن‌هیلی معرفی کرده‌اند که یکی از آن‌ها «تعریف» است که می‌تواند از دو منظرِ «کاربرد» و «صورت‌بندی» بررسی شوند. فعالیت شمارهٔ ۱، فرایند کاربرد یک تعریفِ داده شده را ارزیابی می‌کند؛ به این صورت که از دانش‌آموزان که در صفحــهٔ ۳۸ کتاب با تعریف متوازی‌الاضلاع روبه‌رو شــده‌اند، انتظار می‌رود با به‌کارگیــری تعریفِ ارائه شده، از بین دســته‌ای از چندضلعی‌های داده شده، متوازی‌الاضلاع‌ها را شناسایی کنند.

تصویر ۸. تمرین شمارهٔ ۱، کاردرکلاس صفحهٔ ۴۰

	مربع	مستطیل	لوزی	متوازی الاضلاع
	—	—	—	✓

فعالیت شــمارهٔ ۲ از صفحهٔ ۳۹ نیز، فعالیتی است کــه در آن از دانش‌آموز انتظار می‌رود تعریف‌های ارائه شــده را درک کند. درک تعریف‌ها چنانکه گفته شد، در سطح سوم فن‌هیلی به دست می‌آید. از این گذشته در این فعالیت، تعریف‌های داده شــده به گونه‌ای ارائه شــده‌اند که نیازمند درک و پذیــرش تداخل رده‌های چهارضلعی‌هاســت. در این بخش، ســه تعریف داده شده مستطیل و لوزی و مربع، هر یک به‌عنوان «نوعی متوازی‌الاضلاع» معرفی شــده‌اند. در نظریه فن‌هیلی، درک و پذیرش تداخل رده‌های اشــکال هندســی، از مشخصه‌های ورود به سطح سوم است.

فعالیت شمارهٔ ۳ از همین صفحهٔ کتاب نیز که در قسمت پایین تصویر ۷ دیده می‌شود، نیازمند بیان یک استدلال استنتاجی تک‌گام است. این شروع یک اثبات غیررسمی در هندسه اســت و توانایی‌ای است که باز هم در فهرست مشخصه‌های سطح سوم فن‌هیلی قرار می‌گیرد (کلمنتــس، ۲۰۰۳؛ پیوزی، ۲۰۰۳؛ مالوی، ۲۰۰۲؛ کراولی، ۱۹۸۷؛ یوسسکین، ۱۹۸۲؛ فن‌هیلی، ۱۹۵۹).

در جمع‌بنــدی تحلیل این ســه فعالیت، می‌توان چنین اظهار داشت که سطح مورد انتظار برای انجام و درک آن‌ها، سطح سوم فن‌هیلی است.

تصویر ۸، نخستین تمرینِ کاردرکلاس صفحهٔ ۴۰ از کتاب را نمایش می‌دهد که در ادامه، مورد بررســی قرار می‌گیرد.

فعالیتی که در تصویر ۸ نمایش داده شده است، با وجود ظاهر سادهٔ آن، باز هم نیازمند درک عمیق تداخل رده‌های چهارضلعی‌هاست (سطح سوم فن‌هیلی). بعضی از پژوهشگران و معلمان به‌طور تجربی و در عمل، از واژهٔ «ســاده» برای توصیف چنین فعالیت‌هایی به کار برده می‌شود.

البته ممکن اســت در کلاس درس، به‌طور عملی دیده شــود که دانش‌آموزان پس از انجام فعالیت‌های مربوط به دو صفحــهٔ ۳۸ و ۳۹ (که پیش از این مورد بررســی قرار گرفتنــد)، این جدول را بــا موفقیت پُر می‌کنند و می‌توان با مشــاهدهٔ این عملکردها، نتیجه گرفت کــه دانش‌آموزان تداخل رده‌های چهارضلعی‌ها را درک کرده‌انــد. در صورتی کــه یافته‌های پژوهش صفابخش (۱۳۹۴)، بیانگر آن است که چنین تحلیلی ممکن است زیاده از حد خوش‌بینانه باشد.

در کاردرکلاس شــمارهٔ ۲ (تصویــر ۹)، مجدداً از دانش‌آموز انتظار می‌رود با انجام دست‌ورزی‌هایی روی

یک کاغذ مستطیل شکل، برخی ویژگی‌های مستطیل را جست‌وجو نماید.

در پایان این فعالیت، دانش‌آموز می‌بایســت بر اساس مشاهده‌های تجربیِ حاصل از این دست‌ورزی، ویژگی‌هایـــی را کـــه دریافته بیـــان و توجیه نماید. توانایی نتیجه‌گیری ویژگی‌های اشکال از راه مشاهده و آزمایش، از مشخصه‌های سطح دوم فن‌هیلی است و برای بیان دلیل این یافته‌ها، برخورداری از توانایی استدلال غیررسمی، مورد نیاز است.

فعالیت شمارهٔ ۳ در ادامهٔ همین کاردرکلاس در صفحهٔ ۴۱ آمده است (تصویر ۱۰).

در این فعالیت، اســـتدلال مبین، یک استدلال استنتاجی غیررسمی است که با مشاهده‌های تجربی آمیخته است. بنابراین برای درک آن، برخورداری از توانایی استدلال در ســـطح سوم فن‌هیلی مورد نیاز اســـت. همین موضوع در مورد استدلال‌ها نیز برقرار اســـت. پس از بیان این دو اســـتدلال، از دانش‌آموز خواسته شده اســـت که «به کمک این دو نوشته»، نتیجـــه بگیرد که چهارضلعی MNPQ مربع اســـت. پاسخ مورد انتظار چنین است:

چهارضلعـــی MNPQ هم یک لـــوزی و هم یک مستطیل است؛ پس این چهارضلعی یک مربع است.

این پاسخ، یک استدلال استنتاجی تک‌گام است که پایین‌ترین ســـطح برای دستیابی به توانایی ارائهٔ آن، باز هم سطح سوم فن‌هیلی است.

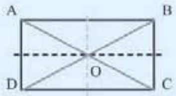
تصویری از ســـه تمرین صفحهٔ ۴۱ که در ادامهٔ کاردرکلاس آمـــده، در تصویر ۱۱ به نمایش در آمده است.

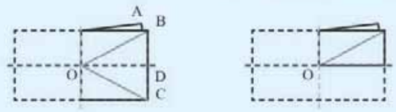
تمرین شمارهٔ ۱، یک مسئلهٔ استنتاجی است که برای پاسخ به آن، توانایی سطح سوم فن‌هیلی مورد نیاز اســـت. همچنین تمرین شمارهٔ ۲ که با برش، تا زدن و مشاهده همراه اســـت و با توانایی سطح دوم فن‌هیلی، قابل پاسخ دادن اســـت. برای پاسخگویی به تمرین شـــمارهٔ ۳ نیز می‌تـــوان از برش و تازدن کمک گرفت و بر اساس مشاهده‌های صورت گرفته، اســـتدلال کرد که در این صورت، به این تمرین در ســـطح دوم پاسخ داده شده است. با این حال ممکن است به این تمرین در سطح سوم فن‌هیلی نیز پاسخ داده شود.

در فعالیت صفحهٔ ۴۳ (شـــکل ۱۲)، ابتدا تعریفی از

تصویر ۹. ادامهٔ کاردرکلاس صفحهٔ ۴۰

۲ـ روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام‌گذاری کنید. سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.





مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به‌دست‌آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان می‌دهد.

● در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته است.

الف) در مستطیل همه زاویه‌ها با هم برابرند؛ چون

ب) در مستطیل ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، چون

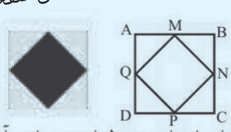
ج) در مستطیل قطرها با هم برابرند؛ چون

زاویهٔ داخلی یک چندضلعی داده شـــده است. سپس دانش‌آموز، طی یک روند اســـتقرایی به سوی دست یافتـــن به الگویی برای محاســـبهٔ مجموعه زاویه‌های داخلی یک چندضلعی دلخواه هدایت می‌شود. سپس رابطه‌ای برای محاسبهٔ اندازهٔ هر یک از زاویه‌های یک چندضلعـــی منتظمِ دلخواه به دســـت می‌آید. در این نتیجه‌گیری‌ها هم توانایی استنتاج غیررسمی، دخیل است.

فعالیت صفحه ۴۸ (تصویر ۱۳) نیز فعالیتی است که در آن، باز هم به کمک استنتاج‌های ساده و غیررسمی

تصویر ۱۰. کاردرکلاس صفحهٔ ۴۱

۳ـ در یک طرح کاشی‌کاری، مربع ABCD دیده می‌شود. چهارضلعیِ MNPQ هم با وصل‌شدن وسط ضلع‌های این مربع تشکیل شده است.



دو دانش‌آموز توضیح داده‌اند که MNPQ چه نوع چهارضلعی‌ای است. نظر این دو دانش‌آموز در اینجا آمده است.

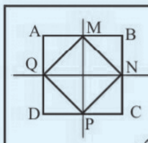
مبین

ABCD مربع است.

این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع‌های آن هستند، تا می‌کنیم.

همهٔ ضلع‌های چهارضلعی MNPQ روی هم می‌افتند.

پس، این چهارضلعی لوزی است.



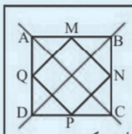
هادی

ABCD مربع است.

این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می‌کنیم.

همهٔ زاویه‌های چهارضلعی MNPQ روی هم می‌افتند. پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است، پس هرکدام 90° می‌شوند.

درنتیجه این چهارضلعی مستطیل است.

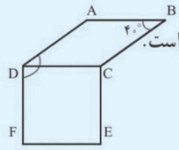


دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می‌توانیم نتیجه بگیریم که MNPQ مربع است.

و در یک روند اســـتقرایی، مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی دلخواه تعیین می‌شود. بنابراین می‌توان این فعالیت را در سطح سوم فن‌هیلی دسته‌بندی کرد.

تصویر ۱۲. فعالیت صفحهٔ ۴۳

تمرین



۱ــ چهار ضلعی ABCD لوزی و چهار ضلعی DCEF مربع است.

الف) چرا $\overline{AD}=\overline{CE}$ ؟ ب) چرا $AB \| EF$؟

ج) زاویهٔ ADF چند درجه است؟

۲ــ روی کاغذ، لوزی دلخواهی رسم کنید و دور آن را ببرید.

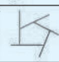
این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به‌دست می‌آید.

۳ــ وسط ضلع‌های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی به دست آمده چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

تصویر ۱۳. فعالیت صفحهٔ ۴۸

فعّالیت

سطر اول جدول زیر، نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر ۳۶۰° است.

مجموع زاویه‌های خارجی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های داخلی	شکل	تعداد ضلع‌ها
ـــ × ۱۸۰° = ۳۶۰°	۳ × ۱۸۰°	۱ × ۱۸۰°		۳
۲ × ۱۸۰° = ـــ	ـــ × ۱۸۰°	۲ × ۱۸۰°		۴
ـــ × ۱۸۰° = ـــ	ـــ × ۱۸۰°	ـــ × ۱۸۰°		۵
ـــ × ۱۸۰° = ـــ	ـــ × ۱۸۰°	ـــ × ۱۸۰°		۶
ـــ × ۱۸۰° = ـــ	ـــ × ۱۸۰°	ـــ × ۱۸۰°		n

الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به‌دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ ـــــ

یک هشت ضلعی چطور؟ ـــــ

جمع‌بندی

ســـطوح فن‌هیلیِ ارزیابی شـــده برای فعالیت‌ها، کاردرکلاس‌ها و تمرین‌های فصل ســـوم کتاب هشتم که تا اینجا در این پژوهش مورد بررســـی قرار گرفتند، در جدول ۱ جمع‌بندی شده‌اند. چنانکه در این جدول، دیده می‌شود، سطوح غالب فعالیت‌ها، کاردرکلاس‌ها و تمرین‌های بررسی شدهٔ فصل سوم کتاب ریاضی پایهٔ هشتم، سطوح دوم یا سوم فن‌هیلی است.

با جمع‌بندی مطالب بیان شـــده دربارهٔ محتوای کتاب درسی در مبحث چندضلعی‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که مطالب کتاب ریاضی پایهٔ هشتم به گونه‌ای طراحی و تدوین گشته‌اند که از دانش‌آموز انتظار می‌رود دست‌کم، از تفکر هندسی در ســـطح دوم برخوردار بوده و آمادهٔ ورود به ســـطح سوم تفکر است. این در حالی است که یافته‌های این پژوهش، نشان می‌دهند که شمار زیادی از دانش‌آموزان دورهٔ متوسطهٔ اول از نظر درک هندسی، در سطح اول فن‌هیلی قرار دارند. همچنین تعداد کمی از دانش‌آموزان این پایه‌ها، در سطح دوم نظریهٔ فن‌هیلی قرار دارند و شمار دانش‌آموزانی که در این پایه به سطح سوم فن‌هیلی رسیده‌اند، اندک است.

نتیجه‌گیری

نتایج به دســـت آمده از تحلیل محتـــوای فعالیت‌ها و تمرین‌های کتاب ریاضی پایهٔ هشتم، نشانگر این است که این مباحث، دربردارندهٔ تعریف‌های ریاضی از شکل‌های هندســـی، مفهوم تداخل رده‌های شکل‌های هندسی، استدلال‌های تک‌گام و اثبات‌های استنتاجیِ انجام شده اســـت که درک همهٔ این موارد، نیازمند برخورداری از توانایی استدلال در سطح سوم فن‌هیلی است. حتی اگر قرار باشـــد که دانش‌آموز در مسیر یادگیری این فصل، به سطح سوم فن‌هیلی دست یابد، باز هم برخورداری از توانایی استدلال در سطح دوم، به‌عنوان سطح ورودی، پیش‌فرضی اســـت که با سطح واقعی درک و استدلال این دانش‌آموزان براساس پژوهش‌های مرتبط هم‌خوانی ندارد. بر اساس نتایج پژوهش صفابخش (۱۳۹۴) سطح غالب دانش‌آموزان پایهٔ هشـــتم در ایران، ســـطح اول فن‌هیلی است و میانگین درجهٔ دستیابی دانش‌آموزان به ســـطح دوم فن‌هیلی که معرف میزان تسلط آن‌ها به این سطح اســـت، پایین‌تر از حد متوسط است. این امر با توجه به مشـــخصه‌های تعریف شده برای سطح دوم و انتظاراتی که در ســـطح دوم نســـبت به توانایی استدلال فرد وجود دارد، بدین صورت تعبیر می‌شود که بیشتر دانش‌آموزان، درک عمیقی از اجزا و ویژگی‌های اشکال هندسی ندارند و از دیدگاه فرایند اثبات، بیشتر آن‌ها نمی‌توانند به کمک اســـتقرای تجربی، ویژگی‌ها را به‌درســـتی اســـتنتاج کنند. این در حالی است که بررسی فعالیت‌ها و تمرین‌های کتاب مربوط به مبحث چهارضلعی‌ها، زاویه‌های داخلی و زاویه‌های خارجی که در کتاب پایهٔ هشـــتم ارائه شده‌اند، بیانگر این واقعیت است که درک میزان قابل توجهی از مفاهیم و مباحث مطرح شده در آن‌ها، نیازمند برخورداری از تفکری در سطح دوم یا سوم فن‌هیلی است. لازم به ذکر است که یوسسکین (۱۹۸۲) اشاره می‌کند که فرایند گذار از یک سطح به سطح بعدی، نیازمند زمانی طولانی‌تر از یک ساعت یا چند جلسهٔ آموزشی است.

عنوان تکلیف (صفحه)	شماره	سطوح ون‌هیلی ارزیابی شده: سطح اول	سطح دوم	سطح سوم
فعالیت صفحهٔ ۳۰	۱		❊	
	۲		❊	
	۳		❊	
کاردرکلاس صفحهٔ ۳۰ و ۳۱	۱	❊	❊	❊
	۲		❊	❊
فعالیت صفحهٔ ۳۸	۱		❊	
	۲		❊	
	۳		❊	
کاردرکلاس صفحهٔ ۳۹	۱		❊	
	۲		❊	❊
فعالیت صفحهٔ ۳۹	۱			❊
	۲			❊
کاردرکلاس صفحهٔ ۴۰ و ۴۱	۱	❊	❊	❊
	۲		❊	❊
	۳			❊
تمرین صفحهٔ ۴۲	۱			❊
	۲		❊	
	۳		❊	❊
فعالیت صفحهٔ ۴۳	-			❊
فعالیت صفحهٔ ۴۸	-			❊

پی‌نوشت‌ها

۱. امیری، حمیدرضا؛ پندی، زهره؛ خسروآبادی، حسین؛ داودی، خسرو؛ ریحانی، ابراهیم؛ سیدصالحی، محمدرضا و صدر، میرشهرام. (۱۳۹۷). ریاضی پایهٔ هشتم دورهٔ اول متوسطه. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

2. Van Hiele

3. Clements

4. Malloy

منابع

۱. صفابخش چکوسری، اشرف. (۱۳۹۴). **بررسی سطح درک و استدلال هندسی دانش‌آموزان پایهٔ هشتم بر اساس مدل ون‌هیلی**. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

2. Alex, J. K., & Mammen, K. J. (2014). **An assessment of the readiness of grade 10 learners for geometry in the context of curriculum and assessment policy statement (CAPS) expectation**.

3. Armah, R. B., Cofie, P. O., & Okpoti, C. A. (2018). **Investigating the Effect of van Hiele Phase-Based Instruction on Pre-Service Teachers' Geometric Thinking**. International Journal of Research in Education and Science, 4(1), 314- 330.

4. Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). **Characterizing the van Hile levels of development in geometry**. Journal for research in mathematics education, 31- 48.

5. Clements, D. H. (2003). **Teaching and learning geometry.** A research companion to principles and standards for school mathematics, 151- 178.

6. Crowley, M. L. (1987). **The van Hiele model of the development of geometric thought**. Learning and teaching geometry, K-12, 1- 16.

7. Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). **The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents**. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, i-196.

8. Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). **On the assessment of the van Hiele levels of reasoning**. Focus on Learning in Mathematics , 20, 27- 46.

9. Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1994). **A model of test design to assess the van Hiele levels**. In Proccedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 41- 48).

10. Malloy, C. (2002). **The van Hiele framework**. Navigating through geometry in grades 6, 8.

11. Mason, M. M. (1995). **Geometric understanding in gifted students prior to a formal course in geometry**.

12. Mason, M. (2009). **The van Hiele levels of geometric understanding**. Colección Digital Eudoxus, 1(2).

13. Nisawa, Y. (2018). **Applying van Hiele's Levels to Basic Research on the Difficulty Factors behind Understanding Functions.** IEJME-Mathematics Education. 13(2), 61- 65.

14. Knight, K. C. (2006). **An investigation into the change in the Van Hiele levels of understanding geometry of pre-service elementary and secondary mathematics teachers** (Doctoral dissertation, The University of Maine).

15. Sánchez-García, A. B., & Cabello, A. B. (2016). **An instrument for measuring performance in geometry based on the van Hiele model.** Educational Research and Reviews, 11(13), 1194.

16. Pusey, E. L. (2003). **The van Hiele model reasoning in geometry: a literature review.**

17. Usiskin, Z. (1982). **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.** CDASSG Project.

18. Van Hiele, P. M. (1959). **The child's thought and geometry.** English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, 243- 252.

19. Van Hiele, P. M. (1999). **Developing geometric thinking through activities that begin with play, Teaching Children Mathematics**, 5(6), pp. 310–316.